

Estudio de caso y modelado matemático en la formación de ingenieros. Caracterización de habilidades STEM

Case study and mathematical modeling in the training of engineers. Characterization of STEM skills

María D. Aravena Díaz^{1*} Danilo Díaz Levicoy¹
Francisco Rodríguez Alveal² Noemí Cárcamo Mansilla¹

Recibido 26 de Mayo de 2021, Aceptado 03 de noviembre de 2021
Received: May 26, 2021 Accepted: November 03, 2021

RESUMEN

El artículo aborda la formación matemática para ingenieros, los que requieren nuevas habilidades para enfrentar desafíos y demandas sociales, que giran cada vez más en torno a STEM (ciencia, tecnología, ingeniería y matemática). La literatura evidencia la importancia de integrar STEM, desde los primeros niveles, usando modelado matemático como puente entre las disciplinas, para prepararlos en el estudio de problemas, soluciones y propuestas, que respondan a necesidades del medio externo. El objetivo fue caracterizar las habilidades STEM, de los estudiantes de primer año de ingeniería, cuando integran conocimientos en la resolución de casos reales, usando el modelado matemático como base del proceso de aprendizaje, en espacios de trabajo colaborativo. Se diseñó una secuencia didáctica, en temas de álgebra y cálculo, usando como estrategia de enseñanza el método de casos. La metodología fue cuantitativa, mediante análisis de contenido de sus producciones. Participaron 4 carreras de ingeniería (civil, industrial, informática y construcción), donde se seleccionó una muestra aleatoria, que corresponde a estudiantes de las carreras de informática y construcción. En el análisis de datos se utilizó estadísticos descriptivos, estadística inferencial y componentes principales. Los principales resultados mostraron que los estudiantes sobrepasan, en promedio, el nivel de competentes en las habilidades STEM, pero siguen presentando debilidades en: interpretar soluciones matemáticas, proyectar el modelo y diseñar soluciones para ingeniería, la cual es atribuida a dificultades en representar en 3D, aplicando propiedades geométricas. Lo anterior, fue comprobado por la falta de asociación entre las habilidades tecnológicas y de ingeniería, para integrar conocimientos.

Palabras clave: Método de caso, modelado matemático, formación de ingenieros.

ABSTRACT

The article addresses the mathematical training for engineers, who require new skills to face social challenges and demands, which increasingly revolve around STEM (science, technology, engineering and mathematics). The literature shows the importance of integrating STEM, from the first levels, using mathematical modeling as a bridge between disciplines, to prepare them in the study of problems, solutions and proposals that respond to the needs of the external environment. The objective was to characterize the STEM skills of first-year engineering students, when they integrate knowledge in solving real cases, using mathematical modeling as the basis of the learning process, in collaborative workspaces.

¹ Universidad Católica del Maule. Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística. Facultad de Ciencias Básicas. Talca, Chile. E-mail: maravena@ucm.cl; ddiazl@ucm.cl; ncarcamo@ucm.cl

² Universidad del Bío-Bío. Facultad de Educación y Humanidades. Chillán, Chile. E-mail: frodriguez@ubiobio.cl

* Autor de correspondencia: maravena@ucm.cl

A didactic sequence was designed, in algebra and calculus topics, using the case method as a teaching strategy. The methodology was quantitative, through content analysis of their productions. Four engineering college careers participated (civil, industrial, informatics and construction), where a random sample was selected, corresponding to students from informatics and construction. Descriptive statistics, inferential statistics and main components were used in the data analysis. The main results showed that students exceed, on average, the level of competent in STEM skills, but continue to present weaknesses in: interpreting mathematical solutions, projecting the model and designing solutions for engineering, which is attributed to difficulties in representing in 3D, applying geometric properties. The above, was verified by the lack of association between technological and engineering skills, to integrate knowledge.

Keywords: Case method, mathematical modeling, engineer training.

INTRODUCCIÓN

La formación matemática para ingenieros está sujeta a grandes cambios debido al avance vertiginoso sobre las demandas de conocimientos y habilidades para abordar los problemas del siglo XXI [1, 2, 3]. Así también, los avances de la sociedad giran cada vez más en torno a la ciencia, la tecnología y la ingeniería, apoyada por las herramientas analíticas de la matemática [4, 5], donde se requiere de enfoques multidisciplinarios para abordar los desafíos locales y globales (e.g. pandemias, crisis climática, producción agrícola, salud, biodiversidad, energía y agua). Lo anterior genera un reto importante para la comunidad educativa de tal forma de responder a las exigencias demandadas por la sociedad, donde la mayoría de ellas están vinculadas con las tecnologías (e.g. simulaciones, realidad aumentada, fabricación aditiva, *Big data* y análisis, *Data science*) [3, 6, 7]. Para dar respuesta a las necesidades actuales, una de las iniciativas que se ha incorporado durante la última década, en diversos países, son los proyectos de Educación STEM [8,9,10], por la correspondencia entre las habilidades requeridas en el siglo XXI [11] y los propósitos de Educación STEM, que apuntan a profundizar la comprensión conceptual de estas disciplinas, así como ampliar su comprensión a través de su uso social y contextos STEM culturalmente relevantes [12, 13].

El debate continuo en la formación de ingenieros sugiere que los graduados STEM son clave para el crecimiento y la innovación de los países, por lo cual se han venido desarrollando una serie de iniciativas para mejorar su formación, destacándose propuestas enfocadas a la resolución de problemas STEM [8], modelado matemático y STEM [5], trabajo de proyectos con enfoque STEM y método de casos

como un enfoque efectivo para la enseñanza, ya que permiten acortar la brecha entre teoría y práctica [14, 15]. Tales iniciativas pretenden mejorar la formación de ingenieros, en particular la formación matemática, donde se han implementado propuestas de modelado matemático en cursos de álgebra de primer año para ingenieros en construcción, ingenieros informáticos e ingenieros industriales y en cursos de análisis vectorial de segundo año para ingenieros electrónicos, colocando la matemática en el contexto de las carreras técnicas [3, 16, 17].

A pesar de las diversas propuestas evidenciadas en las investigaciones, el proceso de cambio no ha sido del todo exitoso, debido a que en la mayoría de las clases de matemática siguen predominando los métodos tradicionales [17, 18]. Esto es, los estudiantes son receptores pasivos de los procesos de aprendizaje, lo que implica una mala preparación para su futuro profesional [2, 15, 18], acrecentándose aún más cuando los tipos de problemas que se trabajan en clases, no los preparan para resolver problemas reales, con los cuales se enfrentarán como ingenieros, entre los que se destacan los procesos de modelado matemático o problemas abiertos [17, 19]. Esta forma de enseñanza, centrada en lo teórico-formal, estructuralista y descontextualizada en diferentes temas de álgebra y cálculo, así como las dificultades que presentan los estudiantes, en conceptos como el objeto función, derivada e integral, ha sido muy bien documentada por investigadores en educación matemática [2, 20, 21, 22], haciendo hincapié en la necesidad de abordar nuevos métodos y metodologías ajustadas a las necesidades actuales en la formación de ingenieros [1, 3].

El estudio que se presenta asumió los nuevos desafíos de incorporar en la formación matemática de los

estudiantes de primer año de ingeniería, para las asignaturas de álgebra y cálculo diferencial e integral, la enseñanza a través del método de casos, como una estrategia efectiva para relacionar la matemática con otras áreas del saber [23, 20, 18], tomando como base del proceso de aprendizaje el modelado matemático [17, 24, 25]. El modelado matemático ha sido considerado como un puente para integrar las disciplinas STEM, donde dicha integración no son meras fusiones entre las disciplinas, sino más bien una cooperación interdisciplinaria que ayuda a los estudiantes a transitar entre dichas áreas desarrollando habilidades que atraviesan las disciplinas STEM [5, 26].

Considerando que las ciencias básicas son un pilar fundamental en la formación de los ingenieros [3], el propósito del estudio fue potenciar dicha formación en contextos STEM [25, 27], desde los primeros niveles [3, 28], para fortalecer la capacidad de aplicación de los conocimientos a través del modelado matemático [12, 13, 24], las conexiones entre conocimientos y casos reales, las conexiones entre conocimiento y capacidad de pensamiento crítico para fortalecer el pensamiento innovador [3, 29]. Las preguntas de investigación fueron:

- ¿Qué habilidades STEM desarrollan los estudiantes de primer año de ingeniería cuando resuelven casos reales usando el modelado matemático como base del proceso de aprendizaje? y ¿Cómo asocian las habilidades cuando integran conocimientos STEM en la resolución de los casos?

Para ello, se planteó el siguiente objetivo general: Caracterizar las habilidades STEM, de los estudiantes de primer año de ingeniería, cuando integran conocimientos en la resolución de casos reales, usando el modelado matemático como base del proceso de aprendizaje, en espacios de trabajo colaborativo.

El método de casos como estrategia de enseñanza

El estudio de temas mediante el método de casos no es algo nuevo, está siendo utilizado desde los años 30 del siglo pasado, principalmente en las escuelas de derecho y en la actualidad en diversas áreas, como: medicina, ciencias, economía, ingeniería, educación, matemática y estadística [29, 30]. El método de casos fortalece el desarrollo de capacidades, por ejemplo: investigación, análisis de problemas complejos, toma

de decisiones, manejo de conflictos, participación activa en la resolución, aplicación de conocimientos teóricos en situaciones prácticas, hábitos de reflexión evitando respuestas simplistas y preparación para el mundo profesional [23, 31, 32]. Por lo cual ha sido considerado como una estrategia de aprendizaje activo por excelencia, puesto que coloca el énfasis en la discusión y construcción del conocimiento, donde los estudiantes participan activamente generando soluciones creativas [29].

En la formación de ingenieros, el método de casos, como estrategia de enseñanza data desde comienzo de la década de los 60, donde se desarrollan proyectos creando casos con problemas reales o situaciones hipotéticas con lo que se enfrentará el ingeniero en su vida profesional, en diversos cursos de mecánica, curso de diseño de proyectos, biotecnología u otras áreas de la ingeniería [18, 25, 30]. En la enseñanza de las matemáticas, Barnes, *et al.* [20] y el National Center for Case Study Teaching in Science (NCCSTS) [25] han empleado relatos de casos como catalizador sobre la enseñanza de conceptos difíciles de entender, llegando a la conclusión que el método ofrece a los estudiantes reflexionar sobre situaciones que ocurren en la práctica, para una mejor formación profesional.

El uso del método de casos en entornos universitarios permite observar un denominador común, poner a prueba a los estudiantes, desde los primeros niveles [3], con problemas que se enfrentará en los cursos de las especialidades y posteriormente en su vida profesional [17, 19, 31], prepararlos para escenarios con problemas de la vida real que tengan relación con el entono de sus carreras [17, 20, 25]. Y en el caso de la formación de ingenieros, proporcionar experiencias de su área y, sobre todo, que ellos integren los conceptos aprendidos durante su formación, confirmando además mediante los resultados de tales experiencias, el desarrollo de habilidades integradoras, cuando se acerca el mundo exterior al aula y viceversa [18, 29].

En el estudio hemos considerado como un caso en educación en ingeniería, lo propuesto por Richard [30], en el sentido que: “*un caso es un relato narrativo de una situación, problema o decisión (...) en educación en ingeniería puede ser un problema, problema técnico o comercial, o desafío de diseño y análisis de experiencias*” (p. 375).

Además, se toma como referente en el sentido que todos los casos deben estar escritos para involucrar a los estudiantes en la situación problema de tal manera que consideren múltiples factores e integren información de diversas fuentes y por lo general problemas abiertos [19, 25, 33]. Asimismo, la entrada en escena de los computadores en el siglo XX y el progreso de la técnica, permite enriquecer el método de casos, pudiendo ser parte en un nuevo sistema de educación que, al ser generalizado e incorporado en los planes de estudio en ingeniería, puede ayudar a mejorar la formación profesional del ingeniero en todas sus formas, pues se trata de comprender un problema desde una perspectiva holística [31], donde la utilización de las tecnologías juegan un rol fundamental para observar los fenómenos desde diversas perspectivas [17, 30].

Modelado matemático para integrar áreas STEM

La idea de introducir el modelado matemático en el contexto educativo es de larga data, identificándose investigaciones a partir de los años 70 [34], producto de la necesidad de mejorar la formación matemática en todos los niveles de enseñanza. Aunque se reconoce que, a comienzos del siglo XX, en la literatura de ingeniería y ciencias económicas, es donde aparece el término modelado matemático [34]. En el ámbito educativo, como metodología de enseñanza, numerosos autores justifican su importancia y la inclusión en las actividades curriculares en matemática, por las innumerables ventajas en el desarrollo de habilidades, tales como: creatividad, descubrimiento, capacidad para evaluar problemas en contextos, capacidad comunicativa y argumentativa del lenguaje científico y por sobre todo, capacidad crítica de la matemática en la sociedad [16, 17, 24, 30, 35], donde el modelado ayuda a la comprensión de los conceptos y métodos matemáticos al proyectar los conocimientos con el mundo externo [17, 34].

En el estudio, cuando se hace referencia a modelado matemático, se han considerado diversos autores [12, 24, 36, 37], que coinciden que para modelar una situación real debe existir una interacción entre un problema real y la matemática, que en términos de Niss [24], tal interacción permite que los objetos y relaciones del problema real estén en correspondencia con objetos y relaciones matemáticas. Así los modelos matemáticos son representaciones simplificadas de la realidad

observada mediante métodos matemáticos [24, 36], para lo cual, dentro del proceso de modelado, se han distinguido diferentes ciclos para usar y crear un modelo matemático [24, 36].

Sobre experiencias de modelado matemático en la formación de ingenieros, Gómez [37] relata experimentos en cursos de álgebra para ingenieros industriales de primer año y en cursos de ecuaciones diferenciales para tercer año, usando procesos de modelado a través de proyectos, destacando que los estudiantes adquieren habilidades, como: interdisciplinaridad, análisis crítico; creatividad; autonomía. Tal como se dijo la entrada en escena de los computadores en el siglo XX ha significado un cambio trascendental en los métodos educativos para enseñar matemática, así diversas investigaciones han incorporado las herramientas tecnológicas como apoyo a los procesos de modelado [21, 24, 38] y en la enseñanza del cálculo, para mejorar la visualización de nociones fundamentales como límite, derivada e integración [22].

En la enseñanza del cálculo, para estudiantes de ingeniería civil industrial, se reportan investigaciones donde se analizan conceptos particulares como la derivada mediante actividades que involucra el modelado matemático [39], pudiendo comprender el significado de la derivada en el contexto real y la tasa de cambio para la interpretación y el razonamiento de los estudiantes en contextos físicos [40]. En este tipo de experiencias, se coloca el énfasis en actividades de exploración de modelos, representaciones, aplicación del modelo en nuevos contextos y refinación del lenguaje, para que los alumnos logren una comprensión acabada del fenómeno en estudio, mediante el razonamiento, interpretación y creación frente a fenómenos cambiantes [41].

En cursos de primer año de ingeniería, para temas de física [42], se ha estudiado la relación entre la comprensión de conceptos en procesos de modelado y el rol de las diversas representaciones, donde se deduce que dichas representaciones ayudan a los estudiantes a dar significado a los conceptos y métodos, profundizar en la comprensión conceptual, aplicar conocimientos y detectar concepciones erróneas [42]. En cursos de álgebra inicial para ingenieros en construcción, se ha incorporado el trabajo de proyectos a través de modelado

matemático, estudiando las funciones polinómicas. Los resultados dan cuenta que los estudiantes desarrollan múltiples habilidades, tales como: utilización de representaciones, comunicación, descubrimiento, análisis crítico, pensamiento estratégico, creatividad y utilización de conceptos y procesos matemáticos en situaciones reales [21].

Las razones que están a la base para recomendar modelado matemático para educación STEM, se relacionan con que el modelado y el uso de modelos es considerado como un campo natural de aplicación en el trabajo científico y tecnológico, mediante el establecimiento de relaciones entre los fenómenos del mundo real y la descripción a través del lenguaje matemático o también dependiendo, en gran medida, del desarrollo de instrumentos [5, 34], siendo reforzada en el siglo XX con las herramientas tecnológicas [37]. Así el trabajo con procesos de modelado apoyado por las tecnologías, proporciona una mayor comprensión en la aplicación de conceptos STEM mediante representaciones, simulaciones y procesos de visualización [38, 43], reconociendo al mismo tiempo los límites de aplicación de los fenómenos [35, 44].

Existe consenso sobre las habilidades necesarias para formar ingenieros de clase mundial [3], así como para una auténtica integración STEM [5], entre las cuales se destacan las habilidades matemáticas de modelar, representar y comunicar [3, 5, 6, 11]. La habilidad de modelar ha sido incorporada en los currículos renovados para la formación del ingeniero del siglo XXI [3], debido a que el proceso de modelado ayuda a los estudiantes a desarrollar el razonamiento analítico. Destacan como importante: relacionar datos, utilizar representaciones, matematizar, aproximar, interpretar soluciones, validar y generalizar [3, 17, 24, 28]. También la comunicación es un aspecto crucial en las habilidades del ingeniero del nuevo siglo [3, 28], con lo cual resulta de interés fomentar espacios para comunicar ideas, métodos, procesos, soluciones y estrategias. Esta habilidad, en la actividad matemática, no sólo ayuda a construir vínculos entre las nociones informales y el lenguaje simbólico, sino también para establecer la conexión entre diversas representaciones, pero fundamentada en argumentos matemáticos que les permita validar proposiciones, procedimientos o métodos [17, 24, 25]. Dentro de las habilidades tecnológicas, el uso de aplicaciones, tales como: bases de datos, planillas de

cálculo, software para simulaciones, visualizaciones o representaciones de modelos o diseños en 2D o 3D [38, 42] y la comunicación a través de estos objetos, se constituyen en artefactos mediadores para la educación de ingeniería integradora e innovadora para los años 2030-2050 [3, 5].

Debido a que “los ingenieros de clase mundial dialogan con otras disciplinas de la ingeniería y de las ciencias relacionadas con su campo, haciéndoles posible trabajar con problemas transdisciplinarios” [3], es necesario que, desde las primeras etapas del ciclo de formación, se les entregue a los estudiantes herramientas para la comprensión en ingeniería mediante el desarrollo de habilidades en su área, por ejemplo: análisis de problemas, diseño de propuestas y desarrollo de soluciones [3]. Los fundamentos y herramientas analíticas de la matemática, con el apoyo de las tecnológicas y las habilidades científicas (e.g. procesos investigativos, formulación de hipótesis, estudio de factores de riesgo en diversos escenarios, comunicación usando lenguaje científico), son un soporte para una comprensión globalizada de los contextos [3, 28]. Las habilidades mencionadas anteriormente son referentes para integrar en el diseño de los casos, considerando las recomendaciones que en dichos diseños se incorporen problemas de la sociedad y en particular “aquellos asociados a las Metas de Desarrollo del Milenio establecidas por ONU” (e.g. energía, agua, transporte, salud, medio ambiente, sostenibilidad y sustentabilidad) [3].

METODOLOGÍA

La metodología utilizada en el estudio fue de corte cuantitativa, mediante un diseño cuasi-experimental, sin grupo control, que permitió medir el progreso de los estudiantes, en forma grupal y colaborativa, respecto de las habilidades STEM, luego de haber participado en la intervención didáctica utilizando como estrategia de enseñanza el método de casos. A continuación, se presenta el contexto y participantes del estudio; el diseño de los casos, donde se explica la metodología seguida en su construcción y la validación de los mismos; planificación de la enseñanza e implementación, que incorpora la metodología de aula y de evaluación; los instrumentos de recogida de datos, que corresponde a las producciones de los grupos, mediante un análisis interpretativo de contenido y finalmente,

los métodos y técnicas de análisis que fueron base para la discusión de resultados.

Contexto y participantes

Los participantes de la investigación corresponden a estudiantes de primer año de la Facultad de Ciencias de la Ingeniería de una Universidad regional, perteneciente al Consejo de Rectores de las Universidades Chilenas (CRUCH,) de la zona central de Chile. La mayoría de los estudiantes (80%) que ingresa a las carreras de ingeniería en esta universidad tiene asentamiento familiar en la misma región, que alcanza un 34% de ruralidad, muy por encima del promedio nacional (13%). Los que provienen en general de establecimientos municipalizados (públicos) donde se acrecienta la diversidad y la brecha, en matemáticas y ciencias, con respecto al país [46,47].

El estudio se realizó sobre la base de una muestra seleccionada mediante un muestreo aleatorio simple. En el cálculo de la muestra se consideró un error de aproximadamente un 5%, un nivel de confianza del 95%, una varianza máxima y un ajuste por población finita, atendiendo que la población era de 350 estudiantes de las carreras de Ingeniería Civil Industrial, Ingeniería Civil, Ingeniería Civil Informática e Ingeniería en Construcción. La muestra quedó constituida de 208 estudiantes de las carreras de Ingeniería Civil Informática e Ingeniería en Construcción quienes trabajaron colaborativamente en grupos de 4 integrantes, generando 56 grupos de trabajo.

Los casos diseñados

Para el estudio se adaptaron 4 casos, enmarcados en los programas de las asignaturas de álgebra y cálculo, donde dichos programas contienen temas comunes para estas carreras. En la asignatura de álgebra: lógica, funciones, funciones polinómicas, exponenciales y logísticas y en la asignatura de cálculo: derivación e integración con sus aplicaciones respectivas [25]. Para el diseño de los casos se consideró las investigaciones que han trabajado en problemas de modelado para ingeniería [24, 25, 37] y las recomendaciones de países líderes [3, 28] sobre la importancia de trabajar problemas enmarcados en las necesidades de la sociedad, descritos en el marco teórico conceptual. En su elaboración se tuvo la precaución de integrar las habilidades STEM en cada uno de los casos, lo

que se detalla en la Tabla 1. La metodología que se utilizó para el diseño de los casos y su relación con las habilidades STEM corresponde a:

- I. Contexto del caso: Está referido a problemas sociales, medioambientales, almacenamiento de información y transporte. Para ello, se realizó una revisión de los contenidos matemáticos base y se articuló con habilidades requeridas en la formación matemática del ingeniero.
- II. Preguntas para la discusión: Relacionadas con las habilidades científicas, que incluye los procesos investigativos y levantamiento de hipótesis. Para ello, se incorporan lecturas de artículos científicos e informe sobre los temas abordados en cada caso, en cuyo análisis se da especial énfasis a la reflexión y discusión usando lenguaje científico en sus explicaciones.
- III. Trabajo Matemático: Se enfoca en las habilidades matemáticas de modelar, donde se utiliza el ciclo de modelado y comunicación matemática de procesos y métodos, presentando argumentos para validar proposiciones. Para modelar se incorporan herramientas digitales que les ayuda a utilizar diferentes representaciones.
- IV. Propuesta de ingeniería: Se centra en las habilidades propias de la especialidad enfocada principalmente en propuestas de solución que contiene: estudio de la solución, modelo de diseño y simulaciones en 2D o 3D
- V. Conclusión: Tiene por finalidad proyectar la solución en el contexto de su profesión (sostenibilidad, cuidado del medio o problemas sociales), con apoyo de informes de ingeniería o de expertos.

En anexos se presentan dos extractos de los casos trabajados, donde se visualiza su construcción y la relación con las habilidades STEM.

Los casos fueron validados por jueces expertos, con experiencia investigativa en educación matemática, modelamiento matemático y docencia en cursos de álgebra y cálculo para ingenieros. Para el análisis de validación se diseñó una pauta que contenía las etapas descritas para cada uno de los casos (Tabla 1). Para el análisis de las respuestas de los expertos, se utilizó validez de contenido según los criterios de Tristán-López [32] y se consideraron las sugerencias de los jueces para mejorar la construcción de estos instrumentos.

Tabla 1. Descripción de los casos diseñados para el trabajo grupal.

Casos/ Dimensión	Caso 1. Circuitos eléctricos	Caso 2. Aeropuertos con aterrizajes peligrosos	Caso 3. La superpoblación mundial. El caso de Chile	Caso 4. Catástrofe ecológica
Base de contenidos	Lógica matemática y Circuitos eléctricos.	Funciones polinómicas. – Modelos polinómicos.	– Funciones y modelos exponenciales y logísticos.	– Derivadas. – Integración. – Optimización.
Procesos investigativos: Discusión y Reflexión.	– Capacidad de manipulación, almacenamiento, recuperación y transporte de información. – Lógica como lenguaje de comunicación. – Circuitos eléctricos y su relación con conectivos lógicos.	– Estudiar diferentes aeropuertos, tipos de aviones que aterrizan y longitud de las pistas. – Discutir la utilidad de un modelo generalizado para diferentes pistas de aterrizaje. – Levantar hipótesis y presentar problema de investigación.	– Huella ecológica y biocapacidad. – Recursos naturales y ecosistemas. – Importancia de los modelos matemáticos y tipos. – Velocidad en el consumo de recursos naturales versus generar ecosistemas.	– Estudio del impacto de los derrames de petróleo. – Ecosistemas. Daños y recuperación. – Levantamiento de hipótesis y preguntas de investigación sobre el derrame de petróleo en Quintero.
Trabajo matemático: Modelamiento matemático.	– Construcción de un circuito en serie y en paralelo. – Función costo en la construcción de un circuito. – Optimización. Circuito equivalente para menor costo.	– Formular un modelo matemático que se ajuste a los datos teóricos registrados por ingenieros para acortar pistas, tomados de una película de aterrizaje en tiempo real (tiempo versus distancia).	– Modelo logístico: población mundial a partir de datos recopilados. Determinación de parámetros y proyección. – Formular modelo con datos censales de Chile y tasa de crecimiento.	– Modelar costo de limpieza de la mancha de petróleo a partir de condiciones iniciales (Forma mancha, cantidad, espesor, variables). – Cálculo de área y volumen de mancha regular e irregular.
Propuesta de solución en el ámbito de la ingeniería.	– Presentar propuesta de un circuito. – Explicar pasos lógicos seguidos en los procesos de resolución (utilizar esquemas, diagramas y ejemplos).	– Propuesta para diseñar nuevas pistas en aeropuerto Arturo Merino Benítez. – Presentar modelo a escala de los tipos de aviones que aterrizan. Ejemplos y simulaciones.	– Proyectar población de Chile de acuerdo al modelo. Predicción. – Presentar propuesta: Importancia de censos incorporando tasas de crecimientos.	– Propuesta de solución para labores de limpieza (ejemplos, simulaciones, esquemas). – Formas de evitar derrames.
Conclusión experta de acuerdo a la profesión.	– Explicar tipos de circuitos y presentar ejemplos de acuerdo a la especialidad.	– Contribución del estudio y modelamiento de acuerdo a la profesión de ingeniero.	– Crecimiento de la población de Chile. – Relacionar con la biocapacidad y recursos disponibles para un desarrollo sostenible.	– Conclusión general sobre costos de limpieza versus cuidados. – Presentar formas de limpieza. – Propuesta para evitar desastres.

Implementación de los casos

La implementación del método de casos se realizó en clases de álgebra y cálculo diferencial e integral, durante un semestre académico y cada uno de éstos fue trabajado durante 15 a 20 días en forma grupal y autónoma, con apoyo en estados de avance. Para su implementación se consideró: (1) *Trabajo cooperativo/colaborativo en equipo*. Se apunta hacia la construcción del conocimiento que favorezca la verbalización, explicitación, el contraste y reelaboración de ideas [21]. Se contempló una enseñanza investigativa y cooperativa, mediante mecanismos de integración, que posibilite la vinculación con otras áreas [17].

(2) *Elaboración de informe escrito*. Se entregó un protocolo de actuación para la escritura del informe, que contiene estudio del caso en el *contexto científico*; modelado matemático del fenómeno; propuesta de solución y conclusión en ingeniería. (3) *Exposición oral y defensa*. Cada grupo expone los casos en un tiempo de 30 minutos, donde deben explicar los elementos descritos en la Tabla 1. Esta instancia es muy relevante para retroalimentar el proceso formativo y para la institucionalización del conocimiento y (4) *Evaluación*. Se diseñó una rúbrica que contiene cada una de las habilidades STEM y su integración (Tabla 1 y Tabla 2).

Instrumentos de recogida de datos

Los instrumentos de recogida de datos corresponden a las producciones orales de los grupos, mediante la defensa y discusión de cada uno de los casos de acuerdo con lo elaborado en el informe escrito. Para codificar las respuestas de los alumnos, se organizó la información de acuerdo con las dimensiones, categorías e indicadores observables en dichas producciones, mediante un análisis interpretativo de contenido. En la codificación se utilizó la escala tipo Likert de 1 a 5, de la siguiente manera: 1: no contesta; 2: insuficiente, lo cual hace referencia a errores en los procesos: de modelado, en procesos investigativos, propuestas y conclusión en el ámbito de la ingeniería; 3: suficiente, denota rasgos mínimos de las habilidades en todos los procesos; 4: competente, dominio de la habilidad en todos los ámbitos, pero falta abordar con mayor profundidad: procesos, métodos, argumentos y justificación en ámbitos STEM; 5: destacado o excelente, hace referencia a un trabajo completamente desarrollado en todos los procesos STEM, tales como, comunicación de procesos y métodos usando argumentos consistentes, uso de propiedades, justificaciones precisas, propuesta de ingeniería y conclusión experta muy elaborada.

Métodos y técnicas de análisis

Para analizar los datos se utilizó estadísticos descriptivos (promedio, desviación estándar, coeficiente de asimetría), análisis de consistencia interna y estadística inferencial para identificar

relaciones entre las dimensiones descritas en los diferentes casos trabajados por los grupos y componentes principales, para reducir dimensiones y encontrar asociaciones entre éstas. Las unidades de análisis corresponden a las producciones de los grupos de trabajo compuestos por 4 estudiantes, la variable dependiente corresponde a los niveles de logro en el desempeño de las habilidades STEM y la variable independiente, a cada caso trabajado por los grupos de estudiantes. Para el análisis estadístico se utilizó el software no comercial R, donde se implementaron rutinas computacionales que permitieron analizar los datos con la metodología propuesta.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

A continuación, se presentan los resultados de la experiencia de los grupos de estudiantes considerando los niveles de desempeño alcanzados en cada una de las habilidades STEM y el coeficiente de asimetría para visualizar la distribución de los datos; en segundo lugar, se analiza el nivel de desempeño promedio en cada uno de los casos y finalmente análisis de correlaciones para identificar las asociaciones entre las habilidades cuando aplican conocimientos STEM.

Niveles de desempeño promedio alcanzados por los grupos en habilidades STEM

Sobre los logros alcanzados por los grupos por cada una de las dimensiones, categorías e indicadores, que se visualizan en la Tabla 2, se presentan los

Tabla 2. Resultados promedios de los grupos en cada dimensión y categoría.

Dimensión	Categoría	Indicadores	Media	D. Estándar	C. Asimetría
Habilidades matemáticas	Modelar	Simplificación	4,42	0,53	-0,64
		Matematización	4,47	0,58	-0,88
		Trabajo con matemáticas	4,32	0,66	-0,94
		Interpretación de solución	3,98	0,71	0,02
		Validación del modelo	4,20	0,74	-0,84
		Análisis y proyección	4,08	0,79	-0,15
	Comunicar	Procesos, métodos, estrategias, lenguaje	4,16	0,74	-0,28
Habilidades científicas	Formular hipótesis	Levanta hipótesis en el contexto del caso	4,19	0,60	0,11
	Procesos Investigativos	Factores de riesgo, estudio de factores medioambientales, lenguaje científico	4,37	0,58	-0,27
Habilidades tecnológicas	Usar medios tecnológicos	Editor gráfico, bases de datos, software, planilla de cálculo	4,44	0,62	-0,63
	Comunicar con objetos tecnológicos	Representaciones, simulaciones, comunicación	4,24	0,72	-0,38
Habilidades de ingeniería	Propuesta de solución	Propuesta en el contexto del caso	4,17	0,58	-0,34
	Conclusión experta	Enmarcar conclusión en el contexto de la profesión	4,20	0,80	-0,78

promedios de los diferentes grupos, desviación estándar y coeficiente de asimetría que entrega antecedentes sobre la tendencia de los valores respecto de la media que son descritos en este apartado.

Se puede observar en la Tabla anterior que, en general, los resultados promedios de los participantes son superiores a 4,0, donde los indicadores más altos están relacionados con modelar el fenómeno correspondiente a Matemización (4,47) y uso de Editor Gráfico, bases de datos, software, planillas de cálculo (4,44), lo que evidencia que los estudiantes presentan una alfabetización TIC, que les permite hacer uso de estas herramientas para representar, simular y visualizar el fenómeno en estudio. De igual forma en la Matemización, los alumnos describen relaciones matemáticas a partir de las condiciones iniciales para formular el modelo matemático. Lo anterior permite deducir que esta transición es natural en los estudiantes, porque estos procesos son los que más se trabajan en el sistema escolar [17]. Los porcentajes son más bajos en el indicador Trabajo con matemáticas (4,32), ya que deben utilizar teoremas, propiedades, algoritmos de resolución, en vista a encontrar una o más soluciones del problema, lo que generalmente presenta dificultades adicionales al tener que articular varios conceptos y procedimientos matemáticos [24].

En síntesis, los resultados promedios obtenidos por los estudiantes, permiten clasificarlos como

competentes de acuerdo con la escala tipo Likert, salvo en el indicador Interpretación de solución, en el cual obtienen el promedio más descendido (3,98), que está asociado a la explicación y discusión de las soluciones, seguido por el indicador Análisis y proyección (4,08), que implica que los grupos debían encontrar fortalezas y limitaciones del modelo en vista a la posibilidad de generalizar para casos similares. Las causas, sobre la interpretación de soluciones, en general, son atribuidas a que los estudiantes no recurren al contexto de donde han sido extraídos los datos, ni a las condiciones iniciales que se han dado para verificar las soluciones en un rango razonable y, a la vez, compatibles con dichas condiciones. En el caso de proyectar el modelo, la mayor dificultad se presenta en la generalización, debido a obstáculos en los procesos algebraicos para establecer una relación general. En la Figura 1, se puede visualizar los niveles de desempeño alcanzados por cada una de las categorías e indicadores, donde se observa que estos indicadores son los más descendidos respecto de los otros.

Por otro lado, las respuestas de los participantes son heterogéneas, cuyos valores fluctúan entre 0,53 y 0,80. Al respecto, el indicador donde los estudiantes tienen un comportamiento más homogéneo es en Simplificación, en el cual deben descodificar la situación problema de manera de extraer la información más relevante (D.E. = 0,53). En esta misma línea, los resultados muestran que



Figura 1. Representación gráfica de las categorías e indicadores de las habilidades STEM.

los indicadores Matemización, Factores de riesgo, estudio de factores medioambientales, lenguaje científico y Propuesta en el contexto del caso, presentan la misma variabilidad (D.E = 0.58). Lo anterior se debe, en general, a que los estudiantes cuentan con una variedad de recursos que les permite la búsqueda de información para la discusión y reflexión, tales como: artículos científicos, informes del ámbito de la ingeniería, consultas a científicos o ingenieros expertos, comunidades de aprendizaje y foros de discusión. La asesoría de expertos o del profesor les ayuda a seleccionar dicha información que aporta en la resolución del caso.

En los demás indicadores los estudiantes obtienen puntajes más heterogéneos, en particular el indicador relacionado con Enmarcar la conclusión en el contexto de la profesión (D.E = 0,80), lo cual puede ser explicado debido que los grupos presentaron diversas dificultades para usar la matemática en el diseño, planos a escala y representaciones en 3D. Otra causa podría deberse a que, el grupo objeto de intervención son estudiantes de ingreso a primer año, los cuales desconocen las actividades que realiza un profesional en ingeniería o también puede ser explicada atendiendo a la realidad escolar de la cual provienen, donde la formación es parcelada, con ausencia de aplicaciones e integración de conocimientos (46, 48).

Por último, la Tabla 2 entrega el coeficiente de asimetría que en este caso los resultados tienden a presentar un sesgo negativo, lo cual entrega antecedentes que los grupos obtienen valores más separados de la media a la izquierda, lo que confirma las dificultades señaladas, que hay grupos que obtienen valores bajos en la escala y solamente los indicadores Interpretación de las soluciones (0,02) y Formulación de hipótesis (0,11), presentan un sesgo positivo, evidenciando que en estos indicadores los grupos de estudiantes tienden a obtener valores altos de la escala, pero no significa que alcancen altos niveles de desempeño como se puede evidenciar en la interpretación de soluciones.

Niveles de desempeño por casos

En la Tabla 3, se presentan los resultados promedios en cada uno de los casos trabajados por los grupos, lo que permite observar que ninguno de ellos alcanza el nivel de excelente y solamente presentan diferencias estadísticamente significativas en el indicador Análisis y proyección del modelo correspondiente a las habilidades matemáticas.

Asimismo, se puede evidenciar que los estudiantes presentan numéricamente un mayor desempeño promedio en el desarrollo del caso afín a circuitos eléctricos, en la mayoría de los indicadores. Este caso fue el primero que se trabajó en el curso de

Tabla 3. Distribución de puntajes promedios en el logro de habilidades por cada caso.

Dimensión/ Categoría	Indicadores	Caso 1. Circuitos eléctricos	Caso 2. Aeropuertos con aterrizajes peligrosos	Caso 3. La súper población mundial	Caso 4. Catástrofe ecológica	p-valor
Habilidad Matemática/ Modelar	Simplificación	4,75 ± 0,35	4,42 ± 0,40	4,26 ± 0,60	4,56 ± 0,49	0,07
	Matematización	4,35 ± 0,41	4,53 ± 0,55	4,41 ± 0,66	4,75 ± 0,46	0,44
	Trabajo con matemáticas	4,56 ± 0,16	4,28 ± 0,79	4,16 ± 0,72	4,66 ± 0,43	0,16
	Interpretación	4,4 ± 0,51	3,92 ± 0,64	3,85 ± 0,75	4,0 ± 0,75	0,21
	Validación	4,6 ± 0,93	4,26 ± 0,63	4,01 ± 0,70	4,25 ± 0,75	0,20
	Análisis y proyección	4,8 ± 0,42	3,76 ± 0,59	4,07 ± 0,81	3,75 ± 0,88	0,00
Habilidad matemática/ comunicar	Procesos, Métodos, Estrategias, Lenguaje	4,3 ± 0,67	4,30 ± 0,75	3,96 ± 0,74	4,5 ± 0,75	0,21
Habilidades científicas	Formulación de hipótesis	4,5 ± 0,57	4,19 ± 0,63	4,07 ± 0,61	4,25 ± 0,46	0,28
	Procesos Investigativos	4,6 ± 0,51	4,23 ± 0,43	4,32 ± 0,66	4,5 ± 0,53	0,41
Habilidades tecnológicas	Uso de medios tecnológicos	4,2 ± 0,42	4,69 ± 0,48	4,39 ± 0,73	4,5 ± 0,53	0,28
	Comunica con objetos tecnológicos	4,2 ± 0,42	4,23 ± 0,83	4,25 ± 0,79	4,25 ± 0,71	0,99
Habilidades de ingeniería	Propuesta de solución	4,53 ± 0,39	4,17 ± 0,42	4,05 ± 0,62	4,13 ± 0,73	0,17
	Conclusión experta	4,7 ± 0,67	3,92 ± 0,86	4,10 ± 0,78	4,38 ± 0,74	0,10

álgebra y estaba referido a modelar los costos para la toma de decisiones sobre la conveniencia de circuitos en serie o en paralelo, utilizando propiedades de lógica proposicional. La propuesta de ingeniería consistió en simular un prototipo para prender un artefacto utilizando circuitos eléctricos. Estos resultados podrían justificarse por el tema involucrado, más acotado en la relación con otros casos y por la vinculación estrecha de ambas carreras con conocimientos básicos de física y electricidad.

Las mayores dificultades se presentan en el caso 2 (Aeropuertos con aterrizajes peligrosos), donde se presentaban aeropuertos con pistas de aterrizaje de longitudes muy cortas. Allí debían modelar datos teóricos, tomados mediante una película de aterrizaje de un avión en tiempo real (tiempo versus distancia). El modelo matemático correspondía a una función polinómica de grado tres. Los bajos resultados se presentan en las habilidades matemáticas correspondientes a la Interpretación de las soluciones (3,92) y el Análisis y proyección del modelo (3,76), que en promedio no superan el 4,0. Esto es consistente con lo formulado en el apartado anterior, sobre las razones de tales dificultades. Se agrega un problema anexo, referido al estudio del comportamiento del objeto función polinómica al no reconocer características y propiedades, para encontrar las soluciones, lo cual podría ser causa del trabajo matemático predominante en secundaria, donde el objeto función es enseñado mediante procedimientos mecánicos [17, 20].

Otro de los valores bajos, en promedio, corresponde a las habilidades de ingeniería correspondiente a la propuesta que elaboraron en el marco de su profesión (3,92), que estaba relacionada con el estudio del aeropuerto Arturo Merino Benítez de Chile, sobre tipos de aviones que aterrizan y longitud de las pistas. Debían formular una propuesta de re-estructuración del aeropuerto y ver la posibilidad de disminuir la longitud de las pistas de aterrizaje. Las dificultades en este caso, salvo excepciones, se presentaron en el diseño de la solución de acuerdo con la propuesta que habían formulado, donde se les hizo muy complejo diseñar las pistas, realizar la simulación en 3D del aterrizaje de aviones y explicar el aporte de dicha propuesta para el desarrollo de su profesión.

El caso 3 (La superpoblación mundial), estaba referido al estudio del crecimiento mundial de la población y

de Chile, cuyo modelo se aproximaba a una función logística. Allí debían encontrar los parámetros de un modelo establecido, usando propiedades de la función exponencial y logarítmica, que les permita proyectar a futuro. Luego modelar con datos censales de Chile para elaborar una propuesta de apoyo en políticas públicas y relacionar con la biocapacidad y recursos para asegurar la sustentabilidad de la población. Aunque los grupos alcanzan el nivel de competentes (4,0), el uso de propiedades de la función exponencial y logarítmica, para la formulación del modelo logístico, se constituyó en un obstáculo para encontrar las soluciones razonables, lo que dificulta su Interpretación (3,85) y Validación (4,01) para generalizar en el contexto del problema. Dichas dificultades, les llevó a presentar un bajo desempeño en Comunicación matemática (3,96), pues los argumentos para justificar conceptos, propiedades, métodos o procedimientos utilizados en el proceso de modelado, eran poco consistentes.

Por último, el caso 4 (Catástrofe ecológica), estaba referido a los derrames de petróleo en las costas y en medio del mar, formular un modelo matemático para proyectar los costos de limpieza y proponer un sistema para los barcos que sufren accidentes y para aquellos que usan el mar como “basureros” de desecho de restos de petróleo. En este caso, los valores promedio superan el 4,0, en todas las habilidades, aunque siguen presentando dificultades en la Interpretación de soluciones (4,0) y en el Análisis y proyección (3,75), donde debían generalizar para un derrame de manera irregular. Las dificultades de los estudiantes se centran en la aplicación de conceptos y procedimientos del objeto derivada, reconocer la variable tiempo y la extensión de la mancha de petróleo, pues a medida que se extiende, les dificulta identificar que el grosor disminuye y aumenta su radio. También visualizar el volumen para un cierto instante (t) fue una debilidad recurrente para las soluciones numéricas y la interpretación de éstas. La falta de generalización del modelo, cuando se extiende la mancha de petróleo de manera irregular, se debió, en general, al desconocimiento de propiedades geométricas y de integración para cálculos de área y volumen.

El estudio, con la prueba t, evidencia que no hay diferencias significativas en relación con las habilidades STEM en los 4 casos, a excepción del indicador Análisis y proyección del modelo,

cuyas razones han sido discutidas en los apartados precedentes. Para una visión general, en la Tabla 4, se presenta un resumen de resultados, sobre los niveles de desempeño en las habilidades STEM, donde se observa que los grupos de estudiantes, en promedio, se encuentran en un nivel de competente (4,0).

Los bajos resultados analizados anteriormente (Tabla 4), aunque superiores a 4,0, se visualizan en la Figura 2, donde las habilidades de ingeniería son las de menores logros para los casos 2, 3 y 4.

Habilidades que asocian los estudiantes para la integración STEM

Con el propósito de analizar las asociaciones entre las dimensiones, se realizó un estudio de correlaciones entre las habilidades STEM. En la Tabla 5 se presenta la columna de coeficientes tipificados, en cada habilidad y dimensión, que indica la asociación entre las variables y su grado de relación entre las componentes.

En todas las habilidades hay una influencia positiva en sus indicadores, en la cual se observa que existe una alta asociación entre las habilidades matemáticas

de Modelar y Comunicar ($r = 0,66$) y las habilidades matemáticas y de ingeniería en los indicadores Modelar y Propuesta de solución ($r = 0,82$). Una explicación plausible se debe a que los estudiantes que realizan un buen proceso de modelado tienden a comunicar con argumentos consistentes ($r = 0,61$) y aquellos que modelan bien tienden a desarrollar una buena propuesta de solución ($r = 0,61$). La habilidad de Modelar tiene una alta asociación con los Procesos investigativos, lo que significa que los estudiantes que realizan un buen proceso de modelado tienden a tener un mejor dominio en los procesos investigativos del fenómeno en estudio ($r = 0,61$). Las habilidades científicas presentan una asociación moderada con la propuesta de ingeniería ($r = 0,46$ y $r = 0,48$), lo que indica que los estudiantes tienden medianamente a utilizar los estudios científicos para generar su propuesta.

Por otra parte, las correlaciones más bajas se presentan entre las habilidades científicas relacionadas con las tecnológicas ($r = 0,36$ y $r = 0,37$) y con la conclusión de ingeniería ($r = 0,24$ y $r = 0,13$), lo que se condice con los mencionado por Sanders

Tabla 4. Puntuaciones de desempeño en Habilidades STEM para cada uno de los casos.

Habilidades	Caso 1. Circuitos eléctricos	Caso 2. Aeropuertos con aterrizajes peligrosos	Caso 3. La súper población mundial	Caso 4. Catástrofe ecológica	p-valor
Matemáticas	4,55 ± 0,27	4,27 ± 0,49	4,14 ± 0,57	4,44 ± 0,51	0,15
Científicas	4,53 ± 0,52	4,20 ± 0,53	4,15 ± 0,54	4,33 ± 0,43	0,25
Tecnológicas	4,20 ± 0,25	4,46 ± 0,47	4,32 ± 0,62	4,37 ± 0,44	0,69
Ingeniería	4,60 ± 0,44	4,07 ± 0,51	4,07 ± 0,63	4,22 ± 0,67	0,10

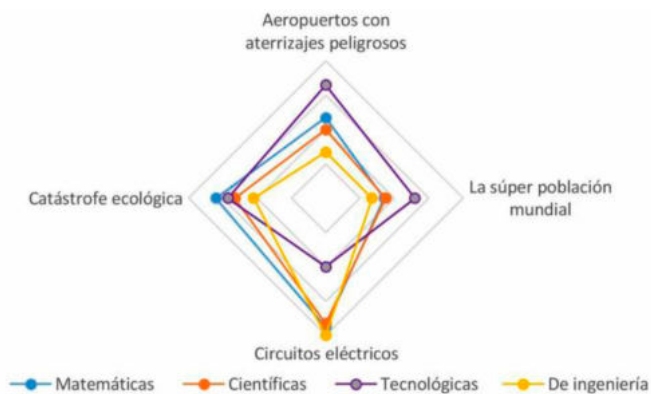


Figura 2. Habilidades STEM desarrolladas por los grupos en cada caso trabajado.

Tabla 5. Matriz de correlación entre las habilidades.

Habilidades	Indicadores	1.1	1.2	2.1	2.2	3.1	3.2	4.1
1. Matemáticas	1.1. Modelar							
	1.2. Comunicar	0,66						
2. Científicas	2.1. Formular hipótesis	0,46	0,29					
	2.2. Procesos investigativos	0,61	0,41	0,53				
3. Tecnológicas	3.1. Uso medios tecnológicos	0,39	0,24	0,36	0,30			
	3.2. Comunicación	0,48	0,43	0,37	0,23	0,18		
4. de Ingeniería	4.1. Propuesta de solución	0,82	0,59	0,46	0,48	0,31	0,35	
	4.2. Conclusión experta	0,61	0,57	0,25	0,24	0,13	0,30	0,62

Coefficiente correlación: Muy baja:]0,0 , 0,2]; Baja:]0,2 , 0,4]; Moderada:]0,4 , 0,6]; Alta:]0,6 , 0,8]; Muy alta:]0,8 , 1,0[.

[27] del insuficiente trabajo de integración en la educación secundaria, en particular relacionadas con las habilidades digitales, aplicadas al diseño y simulación en 3D. Finalmente, existe una asociación alta entre las propuestas de solución y la conclusión experta ($r = 0,62$), lo que implica que los estudiantes que desarrollan una buena propuesta tienden a presentar una conclusión más elaborada.

DISCUSIÓN

A partir de los resultados presentados, se discuten aquellos más importantes que han permitido caracterizar, en los grupos de estudiantes, las habilidades STEM y la asociación que ellos realizan, entre dichas habilidades, para integrar conocimientos. Se ha podido observar que en todos los casos los grupos, en promedio, logran un nivel que sobrepasa la categoría de competente en las 4 habilidades, pero existen grupos de estudiantes que presentan dificultades que es importante resaltar para nuevas propuestas en esta línea.

Sobre las habilidades matemáticas, a pesar de los niveles de desempeño alcanzados, es importante señalar que los estudiantes presentaron dificultades en algunas fases del ciclo de modelado, puesto que, en la interpretación de las soluciones, aún existen grupos que no alcanzan la categoría de competente. Las mayores dificultades se centran en el conocimiento del objeto función y el uso de propiedades y características de funciones polinómicas, logarítmicas y exponenciales, lo que dificultó interpretar soluciones en contextos. Lo anterior es coincidente con estudios que reportan que el trabajo con funciones se enfoca preferentemente

en el estudio de las afines y cuadráticas y con escasas posibilidades de construcción y análisis del comportamiento de este otro tipo de funciones [39]. También, existen dificultades en la comprensión del objeto derivada como proceso de cambio y el uso de propiedades geométricas para calcular áreas y volúmenes usando técnicas de integración. Lo anterior puede ser causa de la escasa comprensión conceptual de la derivada e integral. Surge la necesidad que se profundice en estos conceptos, con actividades que aborden el razonamiento covariacional, utilizando procesos de visualización, transitando por diferentes registros de representación y, lo que es importante, en el propio registro, que para Duval [45], se constituye en el eje vertebrador para apropiarse de estos objetos matemáticos. El análisis y proyección del modelo, es otro elemento que requiere ser regulado en procesos de modelado debido a que los estudiantes no reconocen limitaciones y fortalezas que permiten analizar las posibilidades de generalización, coincidiendo con estudios que dan cuenta que esta fase del ciclo es poco trabajada tanto en los niveles de educación secundaria como en los primeros niveles de la formación de ingenieros y de profesores [17, 37].

Referido a las habilidades tecnológicas los grupos en promedio sobrepasan el nivel de competente, incorporando elementos visuales para representar los fenómenos, uso de software para representar datos, simulaciones computacionales, validación mediante aproximaciones numéricas, estudiar el comportamiento del fenómeno real y para comunicar resultados de la propuesta de trabajo usando tecnologías [27, 30]. Aunque hay grupos que obtienen bajos valores en la escala, la dificultad

no estriba en el uso de herramientas en 2D, sino más bien en el contexto geométrico y visual, para representar datos, identificar variables, graduar ejes y simular el fenómeno en 3D. Además, se detecta una falta de conocimientos para establecer relaciones con las propiedades geométricas asociadas a las figuras. Lo anterior dificulta el tránsito por las representaciones para encontrar las soluciones matemáticas e interpretarlas en el contexto real.

En las habilidades científicas, los grupos alcanzaron el nivel de competente, principalmente en los procesos investigativos sobre factores de riesgo y estudio de factores medioambientales, pero es moderada la asociación con la propuesta para ingeniería, lo cual podría explicarse por la forma que se enseña ciencia en la educación secundaria, generalmente fragmentada de las otras materias y con escasas aplicaciones en las otras áreas y sobre todo con la realidad [4].

En cuanto a las habilidades de ingeniería, aunque alcanzan el nivel de competente, son las que presentan en promedio los valores más bajos de la escala. Las dificultades se centran en la descripción de la solución experta del ámbito ingenieril debido que los grupos de estudiantes tenían que diseñar, representar a escala y simular el fenómeno en 3D. Sanders [27] manifiesta que el uso de tecnologías, para simular en 3D, es poco utilizado en clases de matemática, ciencia o tecnología, menos aún la integración con otras áreas. El uso de simulaciones, representaciones y visualizaciones de los fenómenos es primordial para comprender su comportamiento y el límite de su aplicación [27, 35, 43].

Respecto de las habilidades para integrar conocimientos STEM, es posible observar en los grupos de estudiantes una asociación de las habilidades matemáticas y de ingeniería y, moderada entre las habilidades matemáticas y tecnológicas, relacionadas con la comunicación de representaciones y simulaciones usando estos medios. Asimismo, hay asociación entre las habilidades matemáticas de modelar con las habilidades científicas atribuidas a un buen desempeño en estas habilidades. Sobre las habilidades científicas hay asociación con las habilidades de ingeniería, pero de forma moderada para utilizar el conocimiento científico en la elaboración de su propuesta. En síntesis, falta un mayor acercamiento de las habilidades tecnológicas con las científicas y con las de ingeniería, relacionadas con el diseño, planos a escala y simulación en 3D.

CONCLUSIONES

A continuación, se describen las conclusiones más relevantes, derivadas de los análisis y discusión de los resultados que han permitido dar respuesta al objetivo propuesto en este estudio. En efecto, se ha caracterizado las habilidades STEM que utilizan los grupos de estudiantes cuando resuelven casos reales, donde se evidencian altos desempeños en la habilidad matemática de modelar correspondiente a las etapas de simplificación, matematización y trabajo con las matemáticas. En las habilidades científicas los logros se manifiestan en los procesos investigativos, referidos al estudio de factores de riesgo de los fenómenos, usando lenguaje científico adecuado a las temáticas. Sobre las habilidades tecnológicas el alto desempeño se relaciona con el uso de estas herramientas para representar, simular y visualizar procesos de modelado en 2D. En las habilidades de ingeniería, aunque alcanzan el nivel de competentes, el uso de herramientas tecnológicas presentó dificultades, salvo excepciones, en el estudio y diseño de soluciones en 3D, para poder consolidar una propuesta más robusta en esta área. Además, se han podido detectar dificultades locales en la habilidad matemática de modelar, que necesitan también ser superadas para una auténtica integración STEM, correspondiente a interpretar y comunicar soluciones matemáticas en el contexto del problema y en el análisis y proyección del modelo para ver posibilidades de generalización. En las habilidades de ingeniería se dio algo similar en el diseño de soluciones para enmarcar la conclusión experta en el contexto de su profesión.

Se ha demostrado que las mayores asociaciones, que realizan los grupos de estudiantes, para integrar conocimientos STEM, se dan entre las habilidades matemáticas con las de ingeniería, faltando mayor acercamiento con las tecnológicas debido a las diversas dificultades que se han reportado en este estudio, referidas al uso de representaciones y simulaciones de fenómenos en 3D, usando propiedades geométricas, que han sido las de mayor complejidad, en la integración de conocimientos relacionados con ingeniería.

Asimismo, los resultados han evidenciado que se necesita una mayor intervención con este tipo de método, puesto que los estudios con propuestas STEM aún son emergentes en la formación matemática de

ingenieros. Un trabajo más sistemático, podría ser prometedor para que los estudiantes adquirieran una mayor integración de conocimientos STEM en el transcurso de su formación, de tal forma de regular en tiempo oportuno las dificultades reportadas anteriormente. En particular, adquirir habilidades para analizar, interpretar y proyectar soluciones, pues están declaradas como intrínsecas al trabajo del ingeniero.

El uso del método de casos, como estrategia de enseñanza, no solo ha permitido potenciar la formación de los estudiantes, sino que además constatar el nivel de desempeño en la integración STEM para observar el fenómeno desde perspectivas múltiples. Este aspecto, ayuda a ampliar sus recursos para comprender el rol que tienen las disciplinas en el ámbito de la ingeniería, donde las herramientas analíticas de la matemática son fundamentales para el estudio y análisis de soluciones en STEM.

Aunque no es posible establecer generalizaciones, esta experiencia entrega información relevante sobre la necesidad de enfocar la enseñanza en ingeniería con nuevos métodos, de tal forma de potenciar su formación mediante el análisis y estudio de problemas cercanos a su profesión. Trabajar casos en contextos no sólo ayuda a utilizar los conceptos y procesos en situaciones, sino también a identificar aciertos y dificultades en contenidos difíciles de entender, como son el objeto función y derivada, para ser regulados en tiempo oportuno, pues son base para abordar problemas propios de la ingeniería.

Finalmente, el método de casos y modelado matemático, como puente entre las habilidades STEM, es prometedor para generar mecanismos de integración de conocimientos, donde las

representaciones, apoyada por herramientas tecnológicas, juegan un rol fundamental para fortalecer la formación de los estudiantes de ingeniería, desde los primeros niveles. Esto, porque hoy más que nunca, los avances de la sociedad giran en torno a STEM, donde los ingenieros son claves para su desarrollo.

Proyecciones del estudio

Aunque los resultados alcanzados han sido favorables, no obstante, se ha detectado que hay grupos de estudiantes que ingresan a primer año de ingeniería con habilidades STEM muy descendidas. Por ello, sería conveniente replicar el estudio en condiciones similares con estudiantes de otras universidades, con una muestra más amplia o bien incorporando un grupo control, para validar o refutar resultados, lo que permitirá aportar nuevas bases de conocimientos en el trabajo con el método de casos en contextos STEM y modelado matemático, debido a que aún es emergente y requiere de más investigación experimental.

Limitaciones

Una de las limitaciones del estudio lo constituye la implementación en una sola universidad, lo que no permite extrapolar resultados a una población más amplia. Así también, faltó un análisis de los estudiantes en forma individual, para caracterizar sus logros en habilidades STEM. Sobre los grupos, una de las limitantes ha sido el tiempo para desarrollar los casos, si se consideran dos elementos importantes, por un lado, su formación en el ámbito escolar de secundaria ha estado fragmentada y con escasas aplicaciones en contextos [17], y por otro, la excesiva cantidad de asignaturas y de contenidos en los programas de estudio en el primer año universitario [48].

REFERENCIAS

- [1] P. Camarena. “Aportaciones de investigación al Aprendizaje y Enseñanza de la Matemática en Ingeniería. Ingeniería en Comunicaciones electrónica”, pp. 1-47. 2010. Fecha de consulta: 01 de junio de 2017. URL: <https://www.ai.org.mx/eventos/coloquios/ingreso/10/camarena.html>
- [2] J. García. “La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería”. *Revista de Educación*. Vol. 37 N° 1, pp. 29-42. 2013. ISSN: 0379-7082. Fecha de consulta: 03 de abril de 2021. URL: <https://www.redalyc.org/comocitar.oi?id=44028564002>
- [3] Corporación de Fomento [CORFO]. “Tendencias Internacionales en la Renovación de Facultades de Ingeniería Informe N1: Factores y tendencias Claves de la Ingeniería a Nivel Internacional Ingeniería 2030”. SYN Iniciativa Ingeniería 2030. Fecha de consulta: 01 de junio de 2017. URL: <http://www.corfo.cl/programas-y-concursos/programas/concurso-nueva-ingenieria-para-el-2030>
- [4] H.M. Fadzil and R.M. Saat. “Enhancing STEM Education during School Transition: Bridging the Gap in Science Manipulative Skills”. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*. Vol. 10 N° 3, pp. 209-218. 2014. ISSN: 1305-8223. DOI: 10.12973/eurasia.2014.107a.
- [5] J. Hallström and K.J. Schönborn. “Models and modelling for authentic STEM education: reinforcing the argument”. *IJ STEM*. Vol. 6 N° 22, pp. 1-10. 2019. ISSN: 2196-7822. DOI: 10.1186/s40594-019-0178-z.
- [6] E. Brynjolfsson and A. McAfee. “The second machine age: Work, progress, and prosperity in a time of brilliant technologies”. WW Norton & Company. Vol. 1, pp. 249-257. New York, USA. ISBN: 978-0-393-23935-5. 2014.
- [7] K.L. Cook and S.B. Bush. “Design thinking in integrated STEAM learning: Surveying the landscape and exploring exemplars in elementary grades”. *School Science and Mathematics*. Vol. 118 N° 3-4, pp. 93-103. 2018. ISSN: 1949-8594. DOI:10.1111/ssm.12268.
- [8] J.M. Ritz and S.C. Fan. “STEM and technology education: International state-of-the-art”. *International Journal of Technology and Design Education*. Vol. 25 N° 4, pp. 429-451. 2015. ISSN: 2365-9440. DOI: 10.1007/s10798-014-9290-z.
- [9] C.K. Baker and T.M. Galanti. “Integrating STEM in elementary classrooms using model-eliciting activities: responsive professional development for mathematics coaches and teachers”. *International Journal of STEM Education*. Vol. 4 N° 10, pp. 1-15. 2017. ISSN: 2196-7822. DOI:10.1186/s40594-017-0066-3.
- [10] R.W. ByBee. “STEM Education Now More Than Ever”. National Science Teachers Association NSTA Press. First Edition. pp. 1-35. ISBN: 9781681406015. 2018. Date of visit: August 13, 2020. URL: <http://sibib2.ucm.cl:2073/login.aspx?direct=true&db=nlebk&AN=2116444&lang=es&site=ehost-live>
- [11] S.Z. Beers. “21st Century skills: Preparing students for their future. STEM: Science, technology, engineering, math”. 2011. Date of visit: May 15, 2017. URL: https://www.mheonline.com/mhmymath/pdf/21st_century_skills.pdf
- [12] G. Roehrig, T. Moore, H.H. Wang and M.S. Park. “Is Adding the E Enough? Investigating the Impact of K-12 Engineering Standards on the Implementation of STEM Integration”. *School Science and Mathematics*. Vol. 112 N° 1, pp. 31-44. 2012. ISSN: 1949-8594. DOI: 10.1111/j.1949-8594.2011.00112.x.
- [13] E. Karahan, S. Bilici and A. Ünal. “Integration of Media Design Processes in Science, Technology, Engineering, and Mathematics (STEM) Education”. *Eurasian Journal of Educational Research*. Vol. 15 N° 60, pp. 221-240. 2015. ISSN: 1302-597X. DOI: 10.14689/ejer.2015.60.15.
- [14] C. Bozic and N. Hartman. “Case-Based Instruction for Innovation Education in Engineering and Technology”. ASEE Annual Conference & Exposition. Indianapolis, USA. 2014. ISSN: 2153-5965. DOI: 10.18260/1-2-20155.
- [15] L. Lattuca, I. Bergom and D. Knight. “Professional Development, Departmental Contexts, and Use of Instructional Strategies”. *The Research Journal for Engineering Education*. Vol. 103 N° 4, pp. 549-572. 2006. ISSN: 2168-9830. DOI: 10.1002/jee.20055.

- [16] J. Gómez. "La matemática reflejo de la realidad. La modelización matemática como herramienta para la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas". Federación Española de Profesores de Matemática (FESPM). Barajoz, España. ISBSN: 978-84-934488-6-8. 2007.
- [17] M.D. Aravena. "Modelación Matemática en Chile". Gedisa. Primera edición. Vol. 1, pp. 195-233. Barcelona, España. ISBN: 978-84-9784-981-4. 2016.
- [18] A. Yadav, G. M. Shaver and P. Meckl. "Lessons learned: Implementing the case teaching method in a mechanical engineering course". Journal of Engineering Education. Vol. 99 N° 1, pp. 55-69. 2010. ISSN: 2523-3971. Date of visit: April 13, 2021. URL: <https://sibib2.ucm.cl:2216/scholarly-journals/lessons-learned-implementing-case-teaching-method/docview/217948779/se-2?accountid=170518>
- [19] S. Lambert and O. Nespoli. "Reflections on the use of case studies in the teaching of engineering design". Fifteenth International Conference on Engineering and Product Design Education (E&PDE). Dublin, Ireland. 2013.
- [20] M. Artigue. "Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender las investigaciones didácticas y los cambios curriculares?". Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol. 1 N° 1, pp. 40-55. 1998. ISSN: 1665-2436.
- [21] M. Aravena y J. Giménez. "Evaluación de procesos de modelización". Revista Uno. Monografía. N° 31, pp. 44-56. 2002. ISSN: 1133-9853.
- [22] D. Bressoud, I. Ghedamsi, V. Martinez-Luaces and G. Törner. "Teaching and learning of calculus". pp. 5-26. Springer. Cham, Switzerland. 2016. ISSN 2366-5955. ISBN: 978-3-319-32975-8 (eBook). DOI: 10.1007/978-3-319-32975-8.
- [23] L.B. Barnes, C.R. Christensen and A.J. Hansen. "Teaching and the case method". Harvard Business School Press. Third Edition., pp. 7-68. Boston, Massachusetts. ISBN: 0-87584-403-0. 1994.
- [24] W. Blum and M. Niss. "Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - State, trends and issues in mathematics instruction". Educational Studies in Mathematics. Vol. 22 N° 1, pp. 37-68. 1991. ISSN: 1573-0816. DOI: 10.1007/bf00302716.
- [25] University at Buffalo. "National Center for Case Study Teaching in Science (NCCSTS)". Date of visit: April 05, 2021. URL: https://atecentral.net/r13194/national_center_for_case_study_teaching_in_science
- [26] J.K. Gilbert and C.J. Boulter. "Developing Models in Science Education". Springer. New York, USA. ISBN: 978-0-7923-6772-7. 2000.
- [27] M. Sanders. "STEM, STEM education, STEMmania". The Technology Teacher. Vol. 68 N° 4, pp. 20-26. 2009. Date of visit: August 12, 2020. URL: <https://sibib2.ucm.cl:2216/docview/235307933?accountid=170518>
- [28] S. Cruz, F. Kri, E. Marchand, M. Lazo y L. Guzmán. "Pertinencia de los perfiles de las carreras de ingeniería en Chile: Análisis de su consistencia con los acuerdos internacionales y el marco nacional de cualificaciones para la educación superior". Pensamiento Educativo. Revista de investigación Educativa Latinoamericana. Vol. 57 N° 2, pp. 1-21. 2020. ISSN: 0719-0409. DOI: 10.7764/PEL.57.2.2020.10.
- [29] K.A. Passyn and M.J. Billups. "How to Improve Written Case Analysis and Reduce Grading Time: The One-Page, Two-Case Method". Journal of Marketing Education. Vol. 41 N° 3, pp. 215-229. 2019. ISSN: 0273-4753. DOI: 10.1177/0273475319826621.
- [30] L. Richard, M. Gorman, W. Scherer and R. Landel. "Promoting Active Learning with Cases and Instructional Modules". The Research Journal for Engineering education. Vol. 84 N° 4, pp. 375-381. 1995. ISSN: 2168-9830. DOI: 10.1002/j.2168-9830.1995.tb00193.x.
- [31] P.K. Raju and C.S. Sankar. "Teaching real-world issues through case studies". Journal of Engineering Education. Vol. 88 N° 4, pp. 501-508. 1999. ISSN: 2523-3971. DOI: 10.1002/j.2168-9830.1999.tb00479.x.
- [32] A. Tristán-López. "Modificación al modelo de Lawshe para el dictamen cuantitativo de la validez de contenido de un instrumento objetivo". Avances en medición. Vol. 6 N° 1, pp. 37-48. 2008. ISSN: 1692-0023.
- [33] C. Davis and E. Wilcock. "Teaching materials using case studies". The UK Centre for

- Materials Education, pp. 1-15. 2003. Date of visit: October 10, 2019. URL: <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.458.5221&rep=rep1&type=pdf>
- [34] M.S. Biembengut. “Modelaje matemático en la educación brasileña: Historia de las ideas e ideas de las historias”. Gedisa. Primera Edición. Vol. 1, pp. 89-108. Barcelona, España. ISBN: 978-84-9784-981-4. 2016.
- [35] R. Lesh and H.L. Doerr. “Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching”. NJ. Lawrence Erlbaum Associates Publishers. ISBN 0-8058-3821-X. 2003.
- [36] K. Maaß. “What are modelling competencies?”. ZDM. Vol. 38 N° 2, pp. 113-142. 2006. DOI: 10.1007/BF02655885.
- [37] J. Gómez. “La modelización matemática: Una herramienta válida en la enseñanza de las matemáticas universitarias”. Revista Suma. Vol. 42 N° 1, pp. 37-46. 2003. ISSN: 1130-488X.
- [38] H. Kotze, G.J. Jacobs and E.D. Spangenberg. “Mathematical Modelling for Engineering Diploma Students: Perspectives on Visualisation”. Springer. First Edition, pp 541-551. Cham, Switzerland. ISBN: 978-3-319-62967-4. 2017.
- [39] M. Cervantes-Salazar, P. Camarena-Gallardo y R. Pinet-Plasencia. “La derivada con la matemática en contexto y el enfoque hacia la modelación”. Científica. Vol. 12 N° 4, pp. 167-173. 2008. ISSN: 1665-0654. Fecha de consulta: 10 de agosto de 2021. URL: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=61411609003>
- [40] J.B. Ärlebäck and H.M. Doerr. “Students’ interpretations and reasoning about phenomena with negative rates of change throughout a model development sequence”. ZDM. Mathematics Education. Vol. 50 N° 1-2, pp. 187-200. 2018. ISSN: 1863-9690. DOI: 10.1007/s11858-017-0881-5.
- [41] J.B. Ärlebäck, H.M. Doerr and A.M. H. O’Neil. “A Modeling Perspective on Interpreting Rates of Change in Context”. Mathematical Thinking and Learning. Vol. 15 N° 4, pp. 314-336. 2013. ISSN: 1098-6065. DOI: 10.1080/10986065.2013.834405.
- [42] T.J. Moore, R.L. Miller, R.A. Lesh, M.S. Stohlmann and Y.R. Kim. “Modeling in Engineering: The Role of Representational Fluency in Students’ Conceptual Understanding”. Journal of Engineering Education. Vol. 102 N° 1, pp. 141-178. 2013. ISSN: 1069-4730. DOI: 10.1002/jee.20004.
- [43] G. Greefrath. “Using technologies: New possibilities of teaching and learning modelling-Overview”. Springer. First Edition. Vol. 1, pp. 301-304. Dordrecht. ISSN: 2211-4920. DOI: 10.1007/978-94-007-0910-2_30. 2011.
- [44] H.H. Wang, T.J. Moore, G.H. Roehrig and M.S. Park. “STEM Integration: Teacher Perceptions and Practice”. Journal of Pre-College Engineering Education. Research (J-PEER). Vol. 1 N° 2, pp. 1-13. 2011. ISSN: 2157-9288. DOI: 10.5703/1288284314636.
- [45] R. Duval. “Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning”. pp. 3-26. ISSN: N/A.1999. Date of visit: August 19, 2021. URL: <https://eric.ed.gov/?id=ED466379>
- [46] Organization for Economic Cooperation and Development (OECD). “PISA 2018 Results (Volume II): Where All Students Can Succeed”. PISA, OECD Publishing, Paris. ISBN: 978-92-64-83235-0. DOI: 10.1787/b5fd1b8f-en. 2019.
- [47] Agencia de la Calidad de la Educación. “Informe nacional de la calidad de la educación 2018”, pp. 7-87. 2018. Fecha de consulta: 12 de agosto de 2020. URL: http://archivos.agenciaeducacion.cl/libro_informe_nacional.pdf
- [48] OCDE. “Revisión de Políticas Nacionales de Educación Informe de la Educación Superior en Chile”. OCDE Y EL BIRD/BANCO MUNDIAL. pp. 185-205, Paris. 2009. ISBN: 978-92-64-05414-1. [Traducción Ministerio de Educación de Chile]. Fecha de consulta: 20 de noviembre de 2015. URL: http://www.opecch.cl/educsuperior/politica_educacion/la_es_en_chile_ocde.pdf

ANEXOS

Anexo 1. Ejemplo del Caso 2: “Aterrizajes peligrosos” trabajado en álgebra.

Fuente: Caso 2 adaptado a partir de:
http://www.bbc.com/noticias/2015/05/150423_vert_tou_pistas.

Caso 2.
AEROPUERTOS CON ATERRIZAJES PELIGROSOS

Existen muchos aeropuertos que se transforman en una verdadera y aterradora aventura tanto para los pilotos como para los pasajeros. El “Aeropuerto Tenzing-Hillary”, de Nepal, tiene su pista de 460 metros con una inclinación del 12%. Por ello, solo se puede acceder a él con helicópteros o pequeños aviones de ala fija.

También el “Aeropuerto internacional de Male”, es desalentador para los pilotos que aterrizan en las Maldivas, la única pista de asfalto, situada a sólo dos metros sobre el nivel del mar y que ocupa toda la longitud de la isla Hulhule. Un pequeño error de cálculo significa que el avión podría terminar en el Océano Índico. Hulhule tiene 90.000 kilómetros cuadrados y se usa principalmente como aeropuerto. Otro aeropuerto peligroso es “Juancho E. Yrausquin”, en la isla caribeña de Saba. La pista de aterrizaje está considerada de uso comercial como la más corta del mundo, mide aproximadamente 396 metros.

I. Preguntas para la discusión.

De acuerdo a la información investiga



Fig 1 Aeropuerto Tenzing-Hillary, de Nepal

1 Tipos de aviones que pueden aterrizar en estas pistas a la longitud normal para aterrizajes. Incorpora los efectos de inclinación.

2 Analiza condiciones de velocidad y rapidez del aterrizaje de aviones para pistas pequeñas. Fundamenta tu respuesta.

3 Formula una pregunta de investigación e hipótesis para estudiar la construcción de pistas de aterrizaje.

II. Trabajo de ingenieros y matemáticos.



Fig 2 Fotografía aérea 2

El diseño y construcción de los aeropuertos requiere de ingenieros con altas competencias, porque está en riesgo la vida de numerosas personas. Por esta razón, las licitaciones para mejorar las pistas de aterrizaje de aviones, mediante nuevos diseños, contratan ingenieros de ciertas empresas especializadas, los cuales hacen pruebas de sistemas y dispositivos que permiten a los aviones aterrizar en pistas de corta longitud. Para dicha construcción, los ingenieros toman películas de aterrizaje de los aviones que aporten evidencias suficientes para que dicha construcción sea la requerida.

Analicemos un caso en el cual se ha tomado una película de un aterrizaje de un avión, midiéndose los tiempos y las distancias recorridas desde el momento en que toca tierra hasta que se detiene. Estos datos les sirven de base para modelar la situación. En la siguiente tabla, se presentan los datos que han registrado los ingenieros.

Tiempo t (s)	0	1	2	3	4	5	6
Distancia D (m)	0	100	175	230	270	300	325

1 Formular un modelo matemático con los datos entregado en la tabla. Justifica y fundamenta conceptos, procesos y estrategias utilizadas.

2 Estudia fortalezas y limitaciones del modelo

III. Construir pistas de aterrizaje es trabajo de ingenieros arquitectos, obreros y muchos otros profesionales.

1 Presentar una propuesta de reestructuración del “Aeropuerto Arturo Merino Benítez” debido a que el alto tráfico requiere mejorar las pistas, para los tipos de aviones que aterrizan. Incluir diseño del aeropuerto, plano a escala y simulación de aterrizaje de aviones. Si decides acortar las pistas: **¿Tu modelo podría ser aplicable para simular desde el momento en que toca tierra y se detiene?**

2 De acuerdo a la carrera que estás estudiando: **¿Como podrías contribuir en el estudio y construcción de pistas de aterrizajes?** Menciona ejemplos concretos, incorporando competencias que deberías adquirir.



Fig 3 Aterrizaje de avión

Anexo 2. Ejemplo caso 4: “Catástrofe ecológica” trabajado en cálculo diferencial e integral.

Fuente: Adaptado a partir del problema formulado por Gómez (2007).

Caso 4. **Catástrofe Ecológica.** Consecuencia de un derrame de petróleo.

Entre los más graves desastres que atenta contra la biodiversidad se encuentran los derrames de petróleo en los mares y los océanos. La contaminación por petróleo crudo o por petróleo refinado es generada accidental o deliberadamente desde diferentes fuentes. La contaminación por petróleo proviene de los accidentes de los buques tanques y de las fugas en los equipos de perforación marina. Otra fuente de contaminación proviene de tierra firme, del que es arrojado al suelo en las ciudades y en zonas industriales, que luego son arrastrados por las corrientes fluviales hasta terminar en los océanos (Echarr, 1998).



Varios han sido los desastres que han ocurrido con el derrame de petróleo, desde los años 60, donde al menos se han reportado 130 desastres petrolíferos graves, entre los más dañinos se pueden mencionar: (1) El Golfo Pérsico, donde se arrojaron deliberadamente alrededor de 1.800.000 toneladas durante la guerra, en enero de 1991. (2) El Golfo de México, en el año 2010, con el hundimiento de la plataforma Deepwater Horizon, se estima que el vertido alcanzó las 780.000 toneladas de petróleo y en el año 1979, el pozo exploratorio Ixtoc I, experimentó un reventón donde unas 530.000 toneladas de crudo se derramaron en el océano. (3) En el mar Caribe los petroleros Atlantic Empress y Aegean Captain colisionaron en el año 1979 frente a las costas de Tobago, cerca de Venezuela, y se produjo el derrame de casi 290.000 toneladas de petróleo, (4) En las costas de Alaska el buque tanque petrolero Exxon Valdez en diciembre de 1988 derramó millones de litros de petróleo y mató más de 30.000 aves marinas y (5) en las costas de

Vancouver, Canadá, donde el buque Nestucca chocó y derramó 800.000 litros de crudo y mató cerca de 40.000 aves marinas (Hampton et al., 2003).



Analicemos las consecuencias y los costos de limpieza de estos desastres.

I. Preguntas para la discusión.

De acuerdo a la información entregada, explica:

- (1) ¿Cuál es el verdadero impacto de un derrame de petróleo?
- (2) ¿Qué daños concretos causa un derrame de petróleo en el medio ambiente? ¿Cuáles son los ecosistemas más afectados?
- (3) ¿Dónde es más peligroso el derrame? ¿En medio del mar o en la costa?
- (4) ¿Qué factores hacen que un derrame sea más nocivo para el medio ambiente?

Justifica y argumenta cada una de tus respuestas. Puedes apoyarte en las investigaciones científicas que se han realizado.



II. Limpieza y recuperación. Tarea de científicos, técnicos, obreros, voluntarios, ingenieros y matemáticos.

Limpiar los derrames de petróleo es de alto costo y existen diferentes formas para la recuperación. Se han utilizado modelos matemáticos para determinar los costos de limpieza simulando la situación. Veamos cómo podemos obtener un modelo para calcular los costos para limpiar una mancha de petróleo en el mar.

- (1) Formula un modelo matemático que permita calcular cuánto costará económicamente limpiar una mancha de petróleo.
- (2) ¿Crees que la mancha se propaga en forma circular o existen otras variables como el viento, que extienden la mancha de forma geométrica más irregular?

Fundamenta tu respuesta y utiliza dibujos para apoyarte. A partir del dibujo que te has dado, busca alguna estrategia para calcular el volumen y área de la superficie de la mancha de petróleo (que no sea circular) de manera aproximada.

III. Explica cómo podrían contribuir los ingenieros, de acuerdo a tu carrera, en las tareas de limpieza. (utiliza ejemplos).

Presenta una propuesta y un bosquejo de los diferentes instrumentos que se utilizan para la limpieza de las manchas de petróleo en el océano (utiliza simulaciones en el computador).